Metrologia: prawo przenoszenia niepewności

dr inż. Paweł Zalewski

Akademia Morska w Szczecinie

Terminologia:

„Niepewność” a „błąd” pomiaru:

W przypadku pojedynczych pomiarów stosujemy określenia:

Błąd bezwzględny: $\Delta = x - x_0$ (1)

Błąd względny: $\delta = \frac{\Delta}{x_0}$ (2)

Gdzie x – wartość zmierzona, x_0 – wartość rzeczywista. Wielkości określone wzorami (1) i (2) są pojedynczą realizacją zmiennej losowej i nie wchodzą do teorii niepewności. W praktyce nie znamy wartości rzeczywistych wielkości mierzonych i szacujemy niepewności pomiarowe wynikające ze statystycznych praw rozrzutu pomiarów. Istotny jest również problem niepewności przypisywanej wielkości złożonej (wyliczanej ze wzoru fizycznego):

$$y = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

Prawo Gaussa przenoszenia niepewności:

Błędy obserwacji powodują, że wszelkie funkcje tych obserwacji są również obarczone błędami.
W przypadku funkcji liniowych ocena niepewności funkcji obserwacji nie jest skomplikowana.
Niepewność standardową (nazywaną też błędem średnim) funkcji nieliniowej $F = y = f(x_1, x_2, x_3, ...)$, może być obliczona dla przybliżonej postaci tej funkcji, przy założeniu, że daje się ona rozwinąć w szereg Taylora.

Funkcja $F(x_1, x_2, x_3)$ w postaci szeregu Taylora w otoczeniu punktu P (x_{01}, x_{02}, x_{03}):

$$F(x_1, x_2, x_3) = F(x_{01} + dx_1, x_{02} + dx_2, x_{03} + dx_3) =$$

$$F(x_{01}, x_{02}, x_{03}) + \frac{\partial F}{\partial x_{01}} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_{02}} dx_2 + \frac{\partial F}{\partial x_{03}} dx_3 + \ldots$$

Prawo Gaussa przenoszenia niepewności:

Utożsamiając zmiany dx_1, dx_2, dx_3 z błędami: ε_x, ε_y, ε_z :

$$y = F(x_1, x_2, x_3) = a \cdot X_1 + b \cdot X_2 + c \cdot X_3 =$$
$$= F_0 + a \cdot dx_1 + b \cdot dx_2 + c \cdot dx_3$$

Pomiędzy błędem funkcji F i błędami zmiennych X, Y, Z zachodzi związek:

$$\varepsilon_F = a\varepsilon_x + b\varepsilon_y + c\varepsilon_z$$

Prawo Gaussa przenoszenia niepewności:

Wobec czego niepewność standardowa funkcji będzie sumą geometryczną różniczek cząstkowych:

$$u_F = m_F = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 m_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^2 m_{x_2}^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_3}\right)^2 m_{x_3}^2 + \ldots +}$$

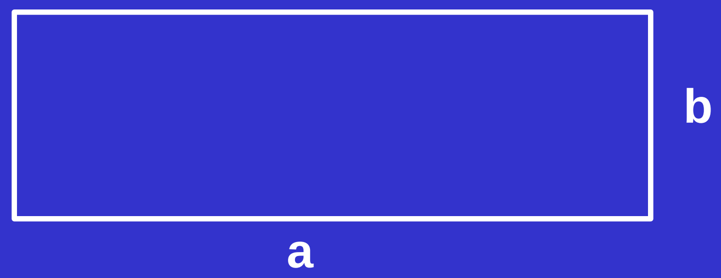
$$m_F = \pm\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i} m_{x_i}\right)^2} = \pm\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F\left(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\right)}{\partial x_i} m_{x_i}\right)^2}\ ;\ n \in N$$

A niepewność względna:

$$u_{Fr} = \frac{u_F}{y}$$

Prawo Gaussa przenoszenia niepewności:

Przykład: Obliczyć pole prostokątnej działki o bokach a, b; błąd średni oraz względny pola.



Z pomiaru długości boków figury:
a = 300 m, $m_a = \pm 0{,}10$ m, b = 20 m, $m_b = \pm 0{,}01$m

Pole: $P = F(a,b) = a \times b = 6000\ \mathrm{m}^2 = 60\ \mathrm{a}$
Średni błąd funkcji P:

$$m_P = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial a}\right)^2 m_a^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial b}\right)^2 m_b^2}$$

Prawo Gaussa przenoszenia niepewności:

Pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial P}{\partial a} = b, \qquad \frac{\partial P}{\partial b} = a$$

$$m_p = \sqrt{(b \cdot m_a)^2 + (a \cdot m_b)^2} = \sqrt{(20 \cdot 0{,}1)^2 + (300 \cdot 0{,}01)^2} = 3{,}6\mathrm{m}^2$$

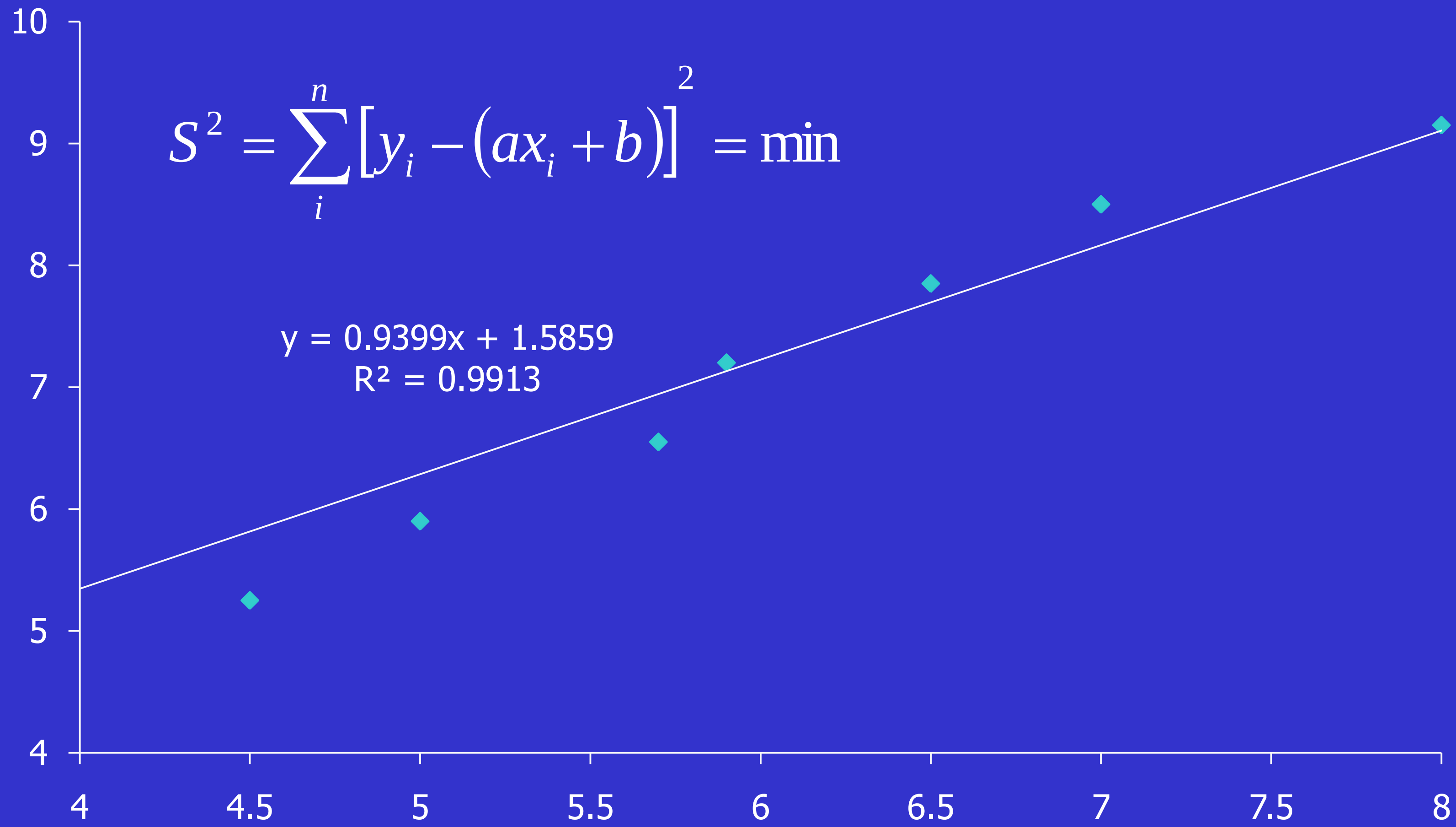
$$P = 6000 \text{ m}^2 \pm 4 \text{ m}^2$$

Błąd względny pola figury:

$$\frac{3{,}6\mathrm{m}^2}{6000\mathrm{m}^2} P = \frac{1}{1600} P$$

Metoda najmniejszych kwadratów w regresji liniowej:

$$S^2 = \sum_{i}^{n} \left[y_i - \left(a x_i + b \right) \right]^2 = \min$$



Metoda najmniejszych kwadratów w regresji liniowej:

Warunek minimum funkcji dwu zmiennych:

$$\frac{\partial S^2}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial S^2}{\partial b} = 0$$

Otrzymuje się układ równań liniowych dla niewiadomych *a* i *b:*

$$a\sum x_i^2 + b\sum x_i = \sum x_i y_i$$
$$a\sum x_i + bn = \sum y_i$$

Rozwiązując ten układ równań otrzymuje się wyrażenia na *a* i *b:*

$$a = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{W}$$
$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{W}$$

Metoda najmniejszych kwadratów w regresji liniowej:

$$W = n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2$$

Odchylenia standardowe obu parametrów prostej:

$$u(a) = \sqrt{\frac{n}{n-2}}\sqrt{\frac{S^2}{W}}$$

$$u(b) = u(a)\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}}$$