

Pomiary sytuacyjno- wysokościowe z obserwacji satelitarnych

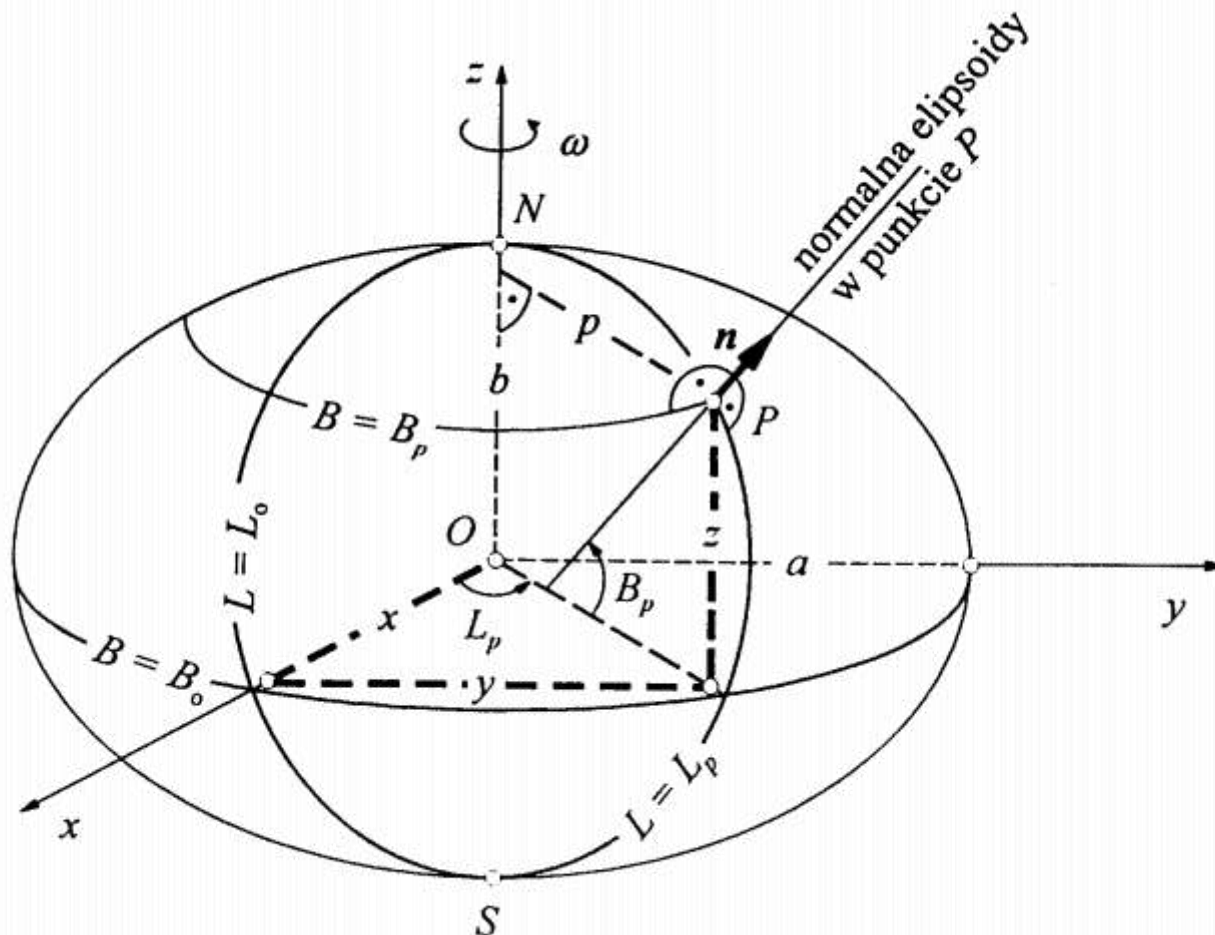


dr hab. inż. Paweł Zalewski, prof. AM

Akademia Morska w Szczecinie

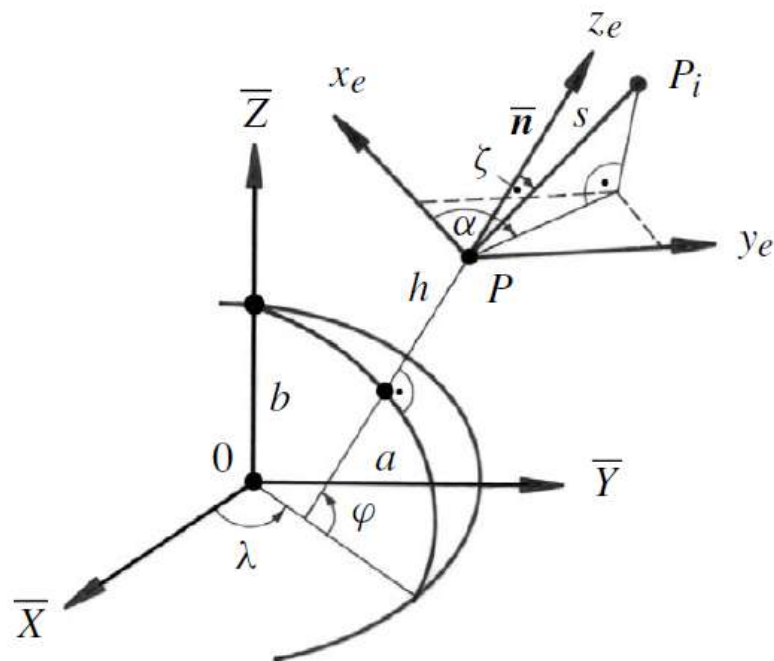
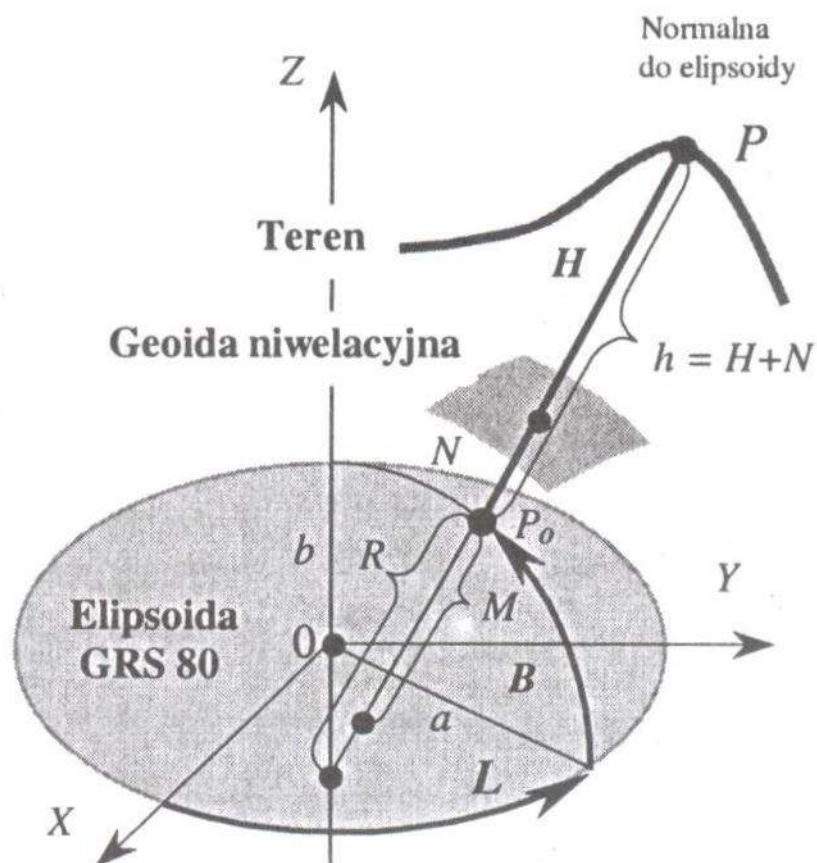
Pomiar sytuacyjno-wysokościowy:

Geodezyjne odbiorniki GPS umożliwiają pomiar położenia punktu osnowy geodezyjnej za pomocą współrzędnych geocentrycznych X, Y, Z ; geodezyjnych $B (\varphi), L (\lambda), h$; płaskich x, y i wysokości niwelacyjnych H :



Pomiar sytuacyjno-wysokościowy:

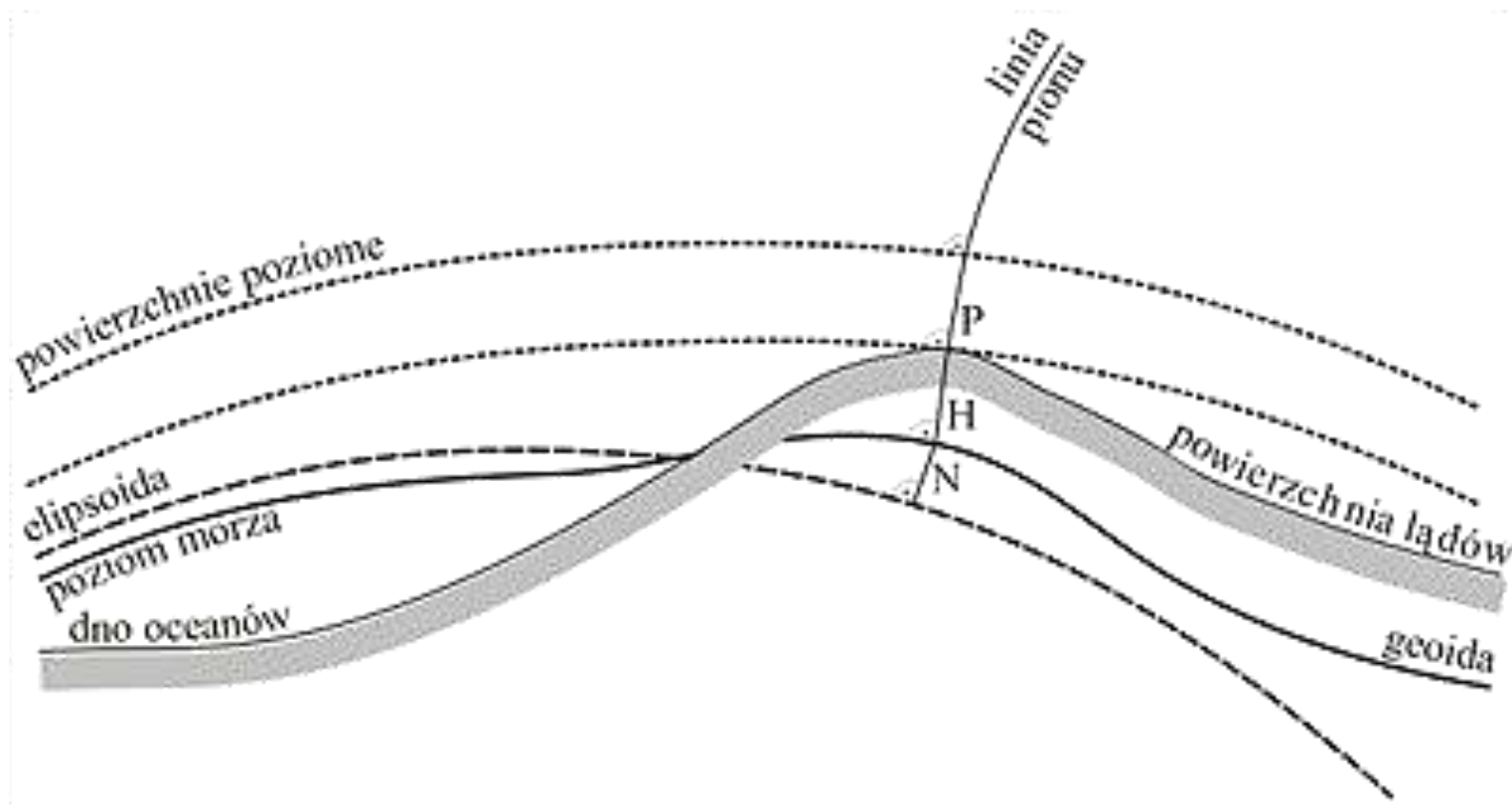
Geodezyjne odbiorniki GPS umożliwiają pomiar położenia punktu osnowy geodezyjnej za pomocą współrzędnych geocentrycznych X, Y, Z ; geodezyjnych $B (\varphi), L (\lambda), h$; poziomych x, y i wysokości niwelacyjnych H :



Pomiar sytuacyjno-wysokościowy:

H - wysokość niwelacyjna (mierzona od geoidy – średniego poziomu morza),

N - wysokość geoidy niwelacyjnej.



Pomiar sytuacyjno-wysokościowy:

H - wysokość niwelacyjna (mierzona od geoidy – średniego poziomu morza),

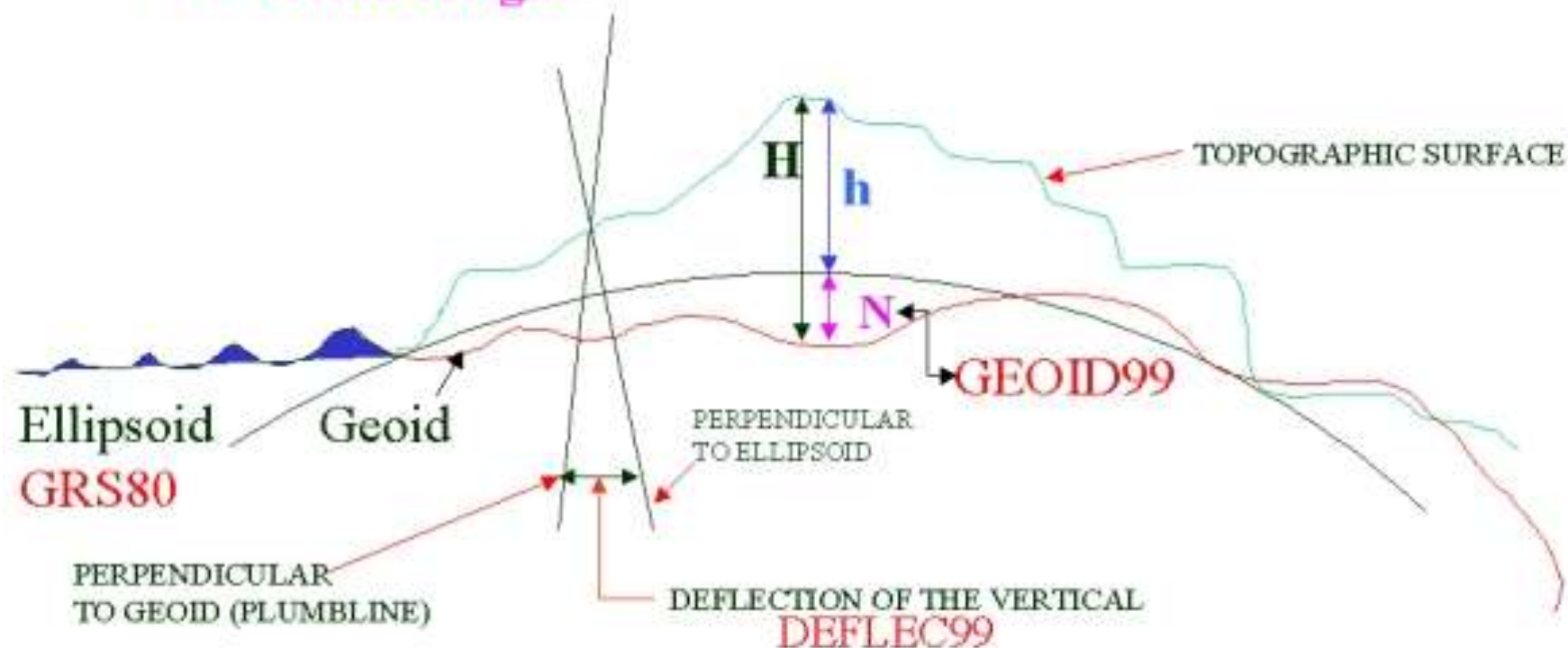
N - wysokość geoidy niwelacyjnej.

H = Orthometric Height

h = Ellipsoidal Height

N = Geoid Height

$$H = h - N$$



Pomiar sytuacyjno-wysokościowy:

Współczesne układy odniesienia (datums) oparte są na [International Terrestrial Reference Frame \(ITRF\)](#), który jest międzynarodowym układem odniesienia współrzędnych o środku w centrum masy Ziemi. W Europie odpowiednikiem ITRF jest [ETRF](#).

Układ odniesienia w rozumieniu zbioru punktów powiązanych z Ziemią, jest obiektem dynamicznym (ze względu na ruchy tektoniczne itp.), poddanym permanentnym obserwacjom. Stanom quasi-statycznym (epokowym) sieci stacji ITRF / ETRF przypisuje się indeks epoki obserwacyjnej. [ITRF jest wyliczany corocznie na podstawie pomiarów globalnej osnowy współrzędnych \(np. ITRF2008\)](#). Parametry ITRF wyznaczane są na podstawie pomiarów geodezyjnych z GPS, interferometrii o bardzo długiej linii bazy (VLBI) i pomiarów laserowych do satelitów (SLR). Obecnie zmiany kolejnych epok ITRF dają różnice pozycji rzędu kilku centymetrów.

Celem ujednolicenia pomiarów geodezyjnych, obserwacje aktualne, dotyczące wyznaczeń położenia punktów, redukuje się do umownego stanu początkowego. W Polsce, obowiązuje redukcja pomiarów poziomych do epoki '89 ([ETRF'89](#)). [Państwowe osnowy geodezyjne, poziome \(płaskie\) i trójwymiarowe \(przestrzenne\) \(EUREF-POL + POLREF\) są nawiązane do punktów sieci europejskiej w układzie ETRF'89 \(inaczej EUREF-89\).](#)

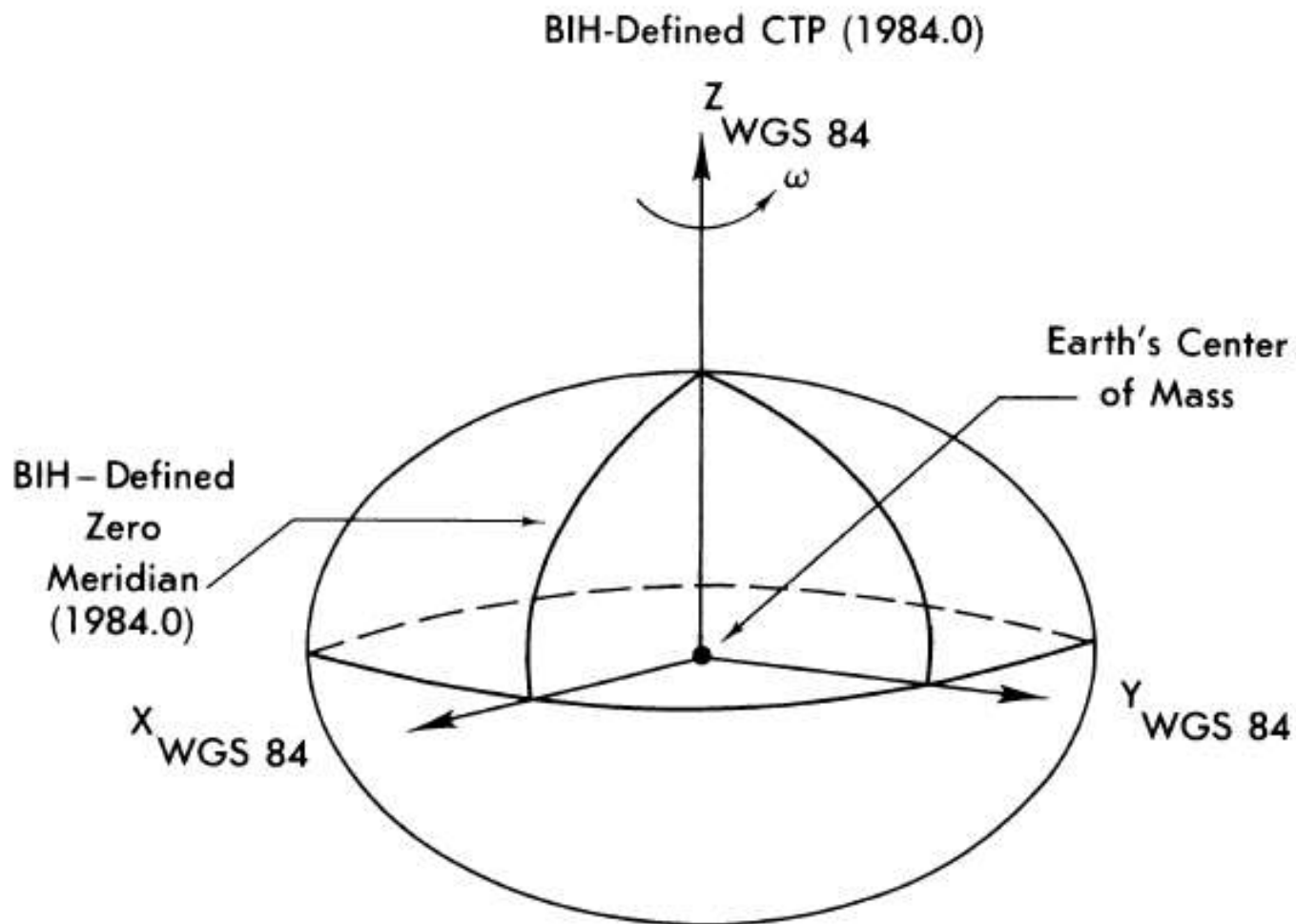
Pomiar sytuacyjno-wysokościowy:

World Geodetic System 1984 (WGS84) jest geodezyjnym układem odniesienia używanym w GPS. WGS84 został zbudowany przez United States Defense Mapping Agency (DMA), późniejszej NIMA (National Imagery and Mapping Agency), a obecnie NGA (National Geospatial-Intelligence Agency). **Chociaż nazwa WGS84 pozostaje niezmienna, to jednak układ został już kilkakrotnie aktualizowany (poddany transformacjom czasowym w 1994, 1997, 2001, 2005, 2009, 2013) zbliżając się bardzo znacznie do parametrów ITRF. Jest to również układ geocentryczny.**

Uwaga: wszystkie odbiorniki GPS wyliczają i zachowują współrzędne według WGS84, transformując je ewentualnie do innych układów odniesienia. W wielu odbiornikach GPS pomimo wyboru lokalnego systemu odniesienia wyświetlanych danych, do urządzeń zewnętrznych (np. komputera) przesyłane są współrzędne w WGS84.

Pomiar sytuacyjno-wysokościowy:

Układ elipsoidalny współrzędnych WGS-84:



Pomiar sytuacyjno-wysokościowy:

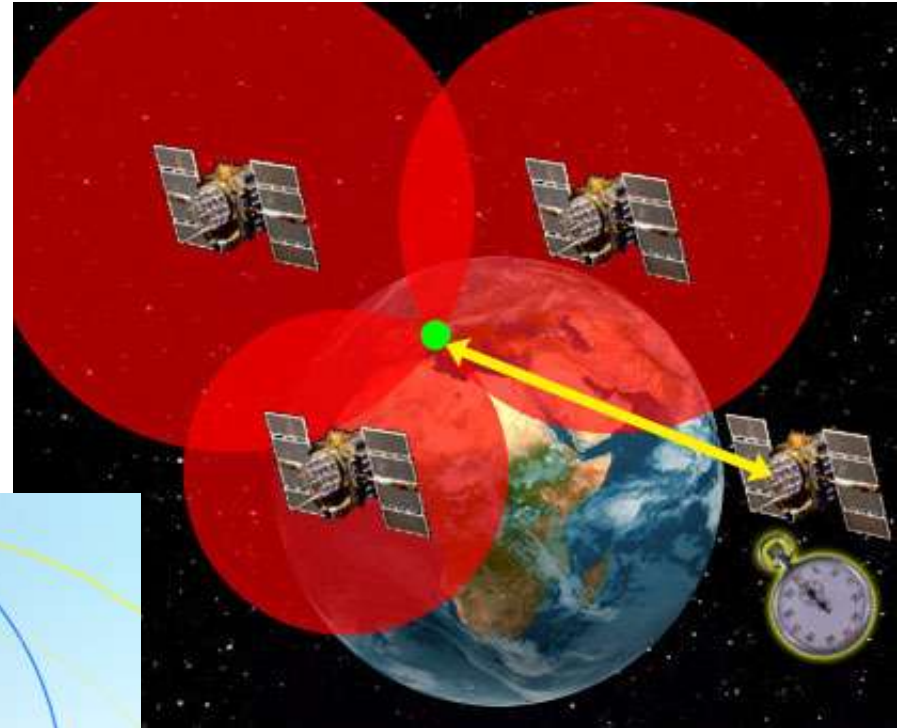
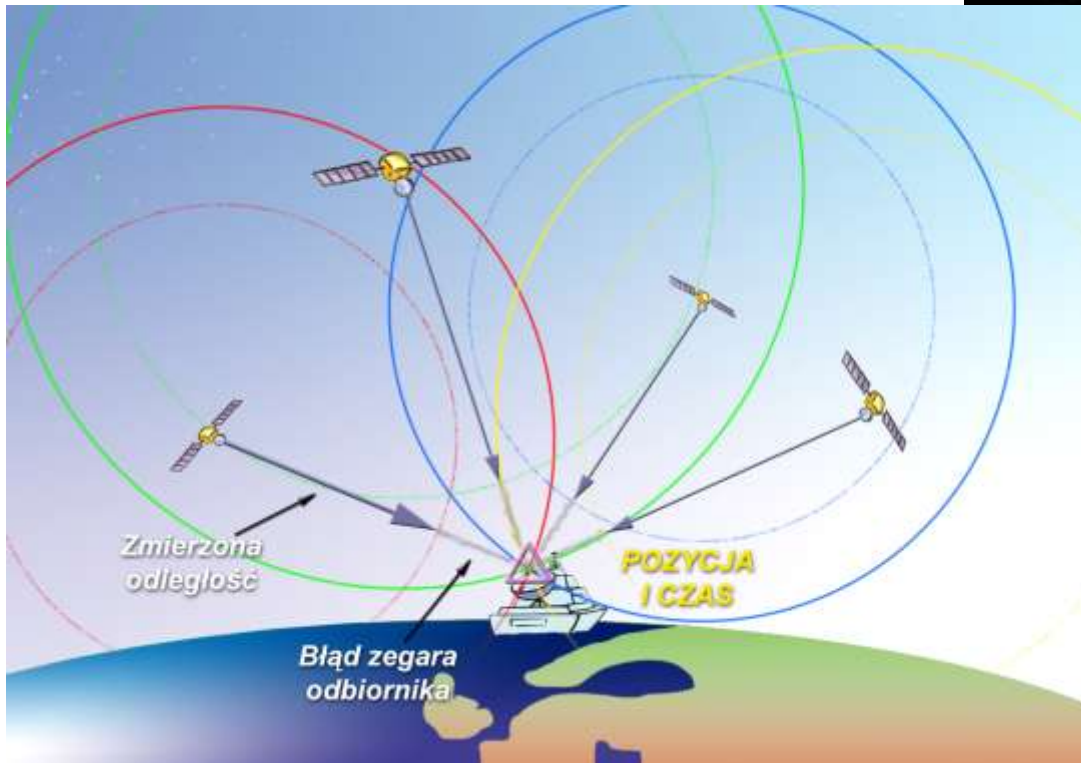
Poza niewielką różnicą w spłaszczeniu (w długości krótszej półosi b i analogicznie w ekscentryczności – mimośrodku e), elipsoida odniesienia stosowana w WGS84 jest praktycznie taka sama, jak elipsoida Geodetic Reference System 1980 (GRS80) używana w ITRF oraz ETRF89.

Elipsoida	Dłuższa półoś	Odwrotność spłaszczenia f^{-1}
GRS80	6,378,137 m	298.257222101
WGS84	6,378,137 m	298.257223563

$$f^{-1} = \frac{a}{a - b}$$
$$e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$$
$$e = \sqrt{2f - f^2}$$

Model pomiarowy GNSS:

Wyznaczenie pozycji w GPS:



Model pomiarów kodowych GNSS:

Współrzędne geocentryczne X, Y, Z centrum fazowego anteny odbiornika satelitarnego systemu pozycyjnego wyznacza się na podstawie matematycznego modelu zmierzonej odległości P_i anteny odbiornika od i -tego satelity o współrzędnych geocentrycznych X_i, Y_i, Z_i :

$$\text{Model:} \quad P_i + c\Delta T_i = c(t - t_i) + c\Delta T_i \equiv \rho_i + c\delta + \delta_{\text{iono}_i} + \delta_{\text{tropo}_i} + \varepsilon_i$$

gdzie:

ΔT_i – poprawka synchronizująca zegar satelity ze wzorcem systemu (błąd zegara satelity),

c – prędkość światła,

t – czas odbioru sygnału zarejestrowany przez kwarcowy zegar odbiornika,

t_i – czas wysłania sygnału według zegara atomowego satelity,

ρ_i – odległość geometryczna od satelity,

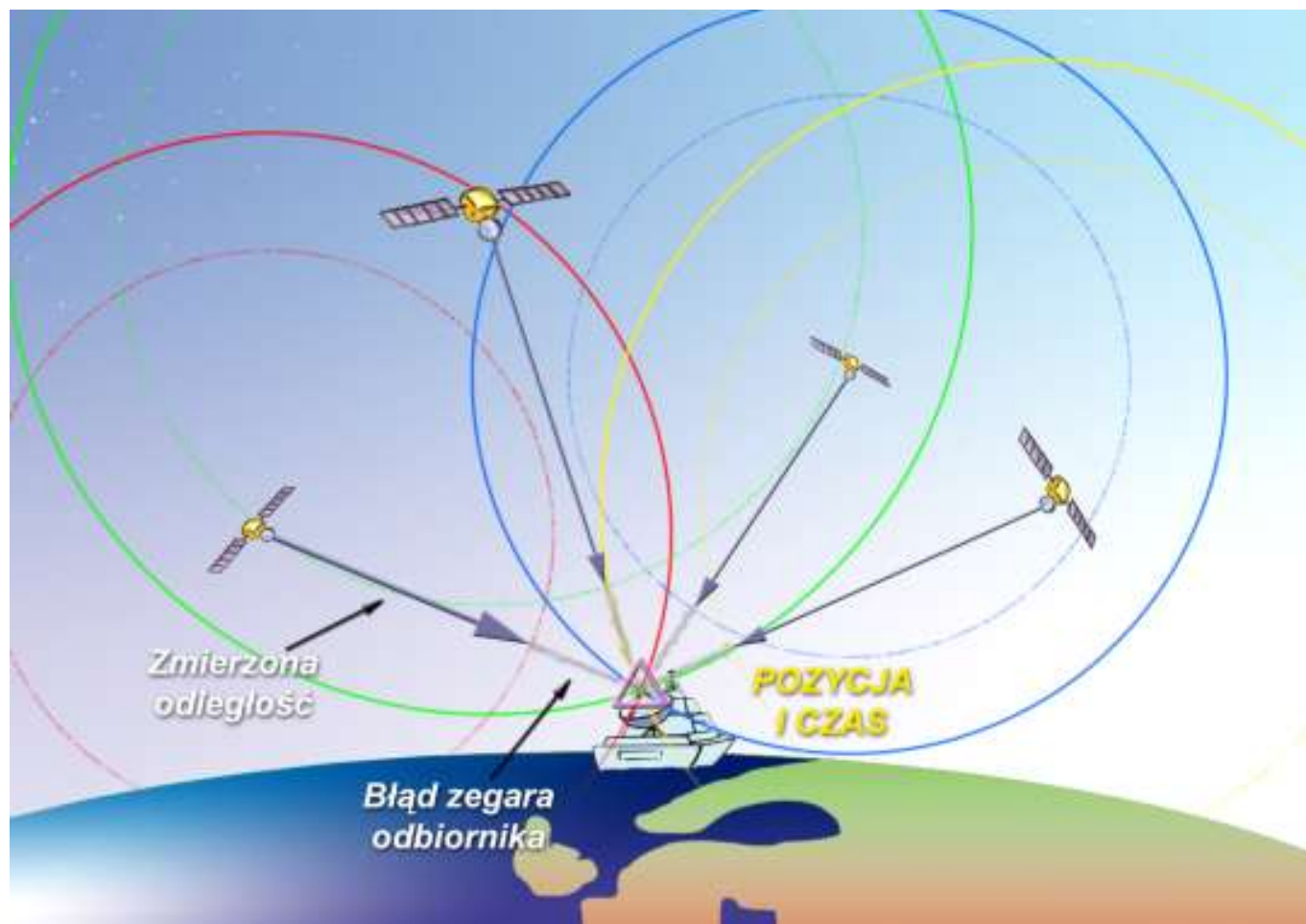
δ – błąd zegara odbiornika,

δ_{iono_i} – poprawka jonosferyczna wynikająca z opóźnienia fali elektromagnetycznej w jonosferze,

δ_{tropo_i} – poprawka troposferyczna wynikająca z opóźnienia fali elektromagnetycznej przez zmienne parametry atmosfery (ciśnienie, temperatura, wilgotność),

ε_i – błąd przypadkowy pomiaru.

Model pomiarów kodowych GNSS:



$$p_i = d_i - c\delta = \sqrt{(x - x_{Si})^2 + (y - y_{Si})^2 + (z - z_{Si})^2} - \delta \quad (3.1)$$

[s] [m]

- 1) Przyjmowane są początkowe, przybliżone (szacowane) wartości x_0 , y_0 , z_0 , δ_0 w kartezjańskim układzie współrzędnych metrycznych ECEF WGS84, uzależnione od niewiadomych x , y , z , δ poprzez wektor Δ poprawek:

$$\begin{cases} x = x_0 + \Delta_x \\ y = y_0 + \Delta_y \\ z = z_0 + \Delta_z \\ \delta = \delta_0 + \Delta_\delta \end{cases} \quad (3.2)$$

2) Budowany jest Algebraiczny Układ Równań Liniowych (AURL), w którym Δ_x , Δ_y , Δ_z , Δ_δ są nowymi niewiadomymi.

Po rozwinięciu równania (3.1) w szereg Taylora po wielkościach przybliżonych (pozycji i odchyłki zegara odbiornika):

$$\begin{aligned}
 p_i = f(x, y, z, \delta) = & f(x_0, y_0, z_0, \delta_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0, \delta_0)}{\partial x_0} \Delta_x + \\
 & + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0, \delta_0)}{\partial y_0} \Delta_y + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0, \delta_0)}{\partial z_0} \Delta_z \\
 & + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0, \delta_0)}{\partial \delta_0} \Delta_\delta + \\
 & + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f(x_0, y_0, z_0, \delta_0)}{\partial x_0^2} \Delta_x^2 + \dots
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Dalsze wyrazy szeregu (3.3) występujące po pierwszych pochodnych cząstkowych:

$$a_{i1} = \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0, \delta_0)}{\partial x_0} = \frac{x_0 - x_{Si}}{\sqrt{(x_0 - x_{Si})^2 + (y_0 - y_{Si})^2 + (z_0 - z_{Si})^2}}$$

$$a_{i2} = \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0, \delta_0)}{\partial y_0} = \frac{y_0 - y_{Si}}{\sqrt{(x_0 - x_{Si})^2 + (y_0 - y_{Si})^2 + (z_0 - z_{Si})^2}}$$

$$a_{i3} = \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0, \delta_0)}{\partial z_0} = \frac{z_0 - z_{Si}}{\sqrt{(x_0 - x_{Si})^2 + (y_0 - y_{Si})^2 + (z_0 - z_{Si})^2}}$$

$$a_{i4} = \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0, \delta_0)}{\partial \delta_0} = -1$$

są pomijane i dlatego:

$$p_i = \sqrt{(x_0 - x_{Si})^2 + (y_0 - y_{Si})^2 + (z_0 - z_{Si})^2} - \delta_0 + a_{i1}\Delta_x + a_{i2}\Delta_y + a_{i3}\Delta_z + a_{i4}\Delta_\delta \quad (3.4)$$

Rozdzielając wiadome od niewiadomych po obu stronach (3.4):

$$\begin{aligned} a_{i1}\Delta_x + a_{i2}\Delta_y + a_{i3}\Delta_z + a_{i4}\Delta_\delta &= \\ &= p_i - \sqrt{(x_0 - x_{Si})^2 + (y_0 - y_{Si})^2 + (z_0 - z_{Si})^2} + \delta_0 \end{aligned}$$

i wprowadzając:

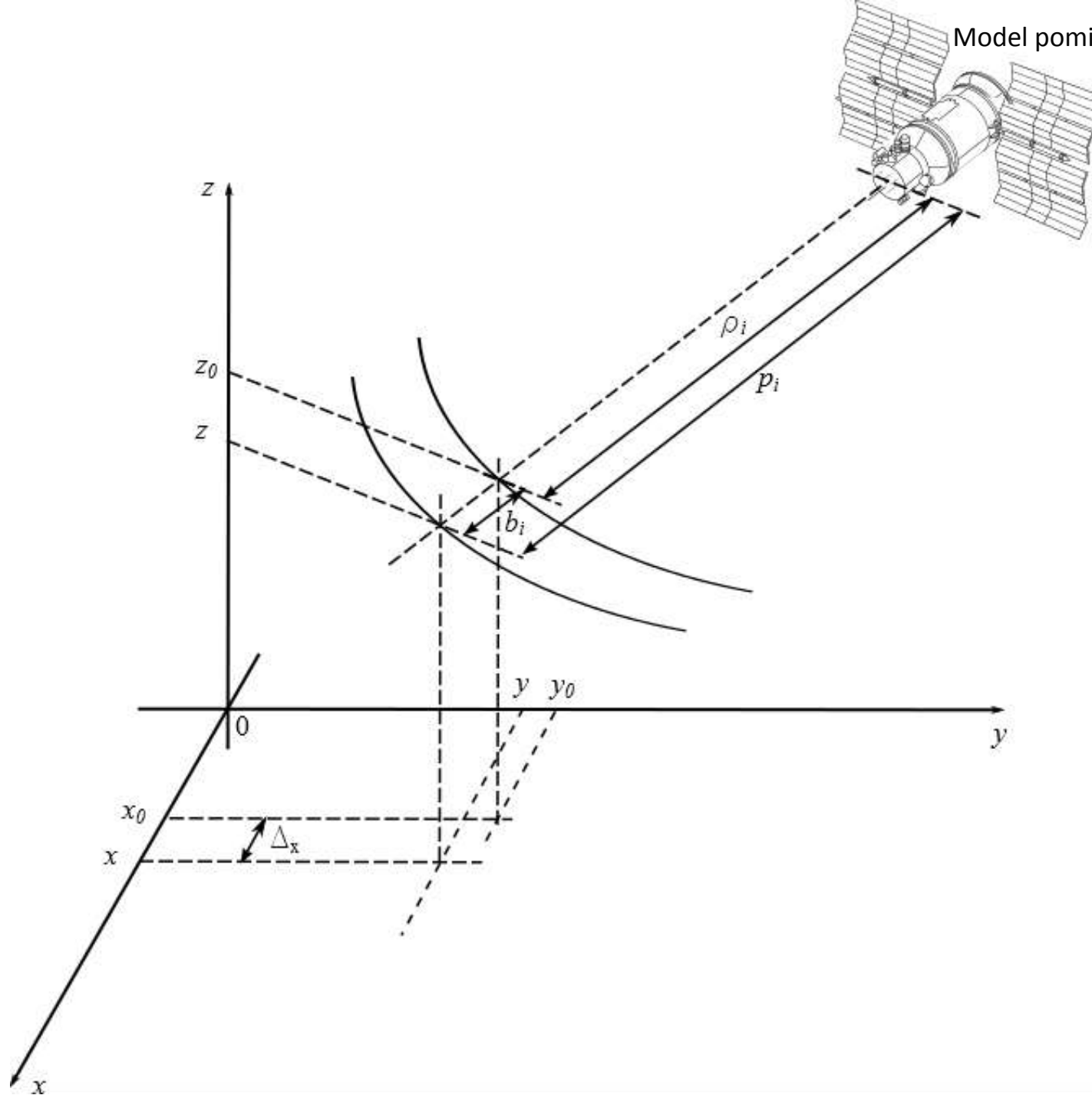
$$b_i = p_i - \sqrt{(x_0 - x_{Si})^2 + (y_0 - y_{Si})^2 + (z_0 - z_{Si})^2} + \delta_0$$

otrzymujemy **AURL** (zazwyczaj nadokreślony):

$$a_{i1}\Delta_x + a_{i2}\Delta_y + a_{i3}\Delta_z + a_{i4}\Delta_\delta = b_i$$

w postaci macierzowej:

$$A\Delta = b \quad (3.5)$$



3) Poszukiwany jest wektor rozwiązań Δ zbudowanego AURL.

Ponieważ została pominięta reszta szeregu (3.3) oraz b jest obarczony błędami pomiarowymi to AURL (3.5) będzie nieoznaczony. Należy więc uwzględnić wektor błędu η :

$$A\Delta = B - \eta \quad (3.6)$$

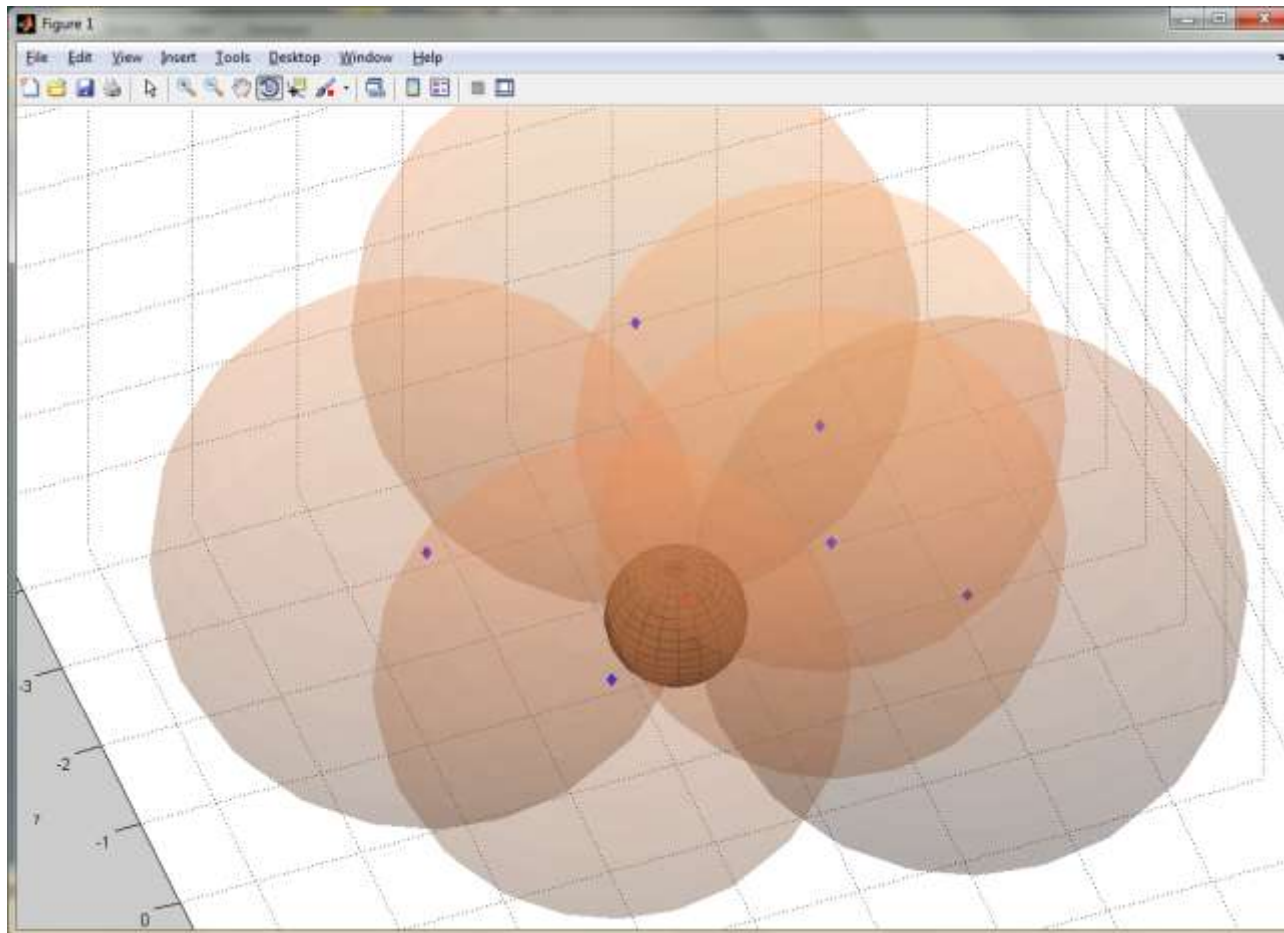
„Wektor błędu” η reprezentuje różnice pomiędzy obserwacjami (b) a modelem ($A\Delta$). Rozwiązaniem (3.6) metodą najmniejszych kwadratów (numerycznej optymalizacji) jest:

$$\Delta = (A^T W A)^{-1} A^T W B \quad (3.7)$$

gdzie W jest diagonalną macierzą wag $w_1, w_2, \dots, w_n$ równych odwrotnościom wariancji URE lub UDRE.

- 4) Jeżeli $\|\Delta\|_{\infty} > 0,0001\text{m}$ algorytm jest powtarzany od kroku 1) zamieniając poprzednie (początkowe) wartości x_0, y_0, z_0, δ_0 na $x_0 + \Delta_x, y_0 + \Delta_y, z_0 + \Delta_z, \delta_0 + \Delta_{\delta}$.

Ostatecznie znajdowane jest rozwiązanie pozycyjne x, y, z, δ :



Pomiar sytuacyjno-wysokościowy:

Przykład dla rzeczywistych danych:

SV	Pseudorange	SV information			
		X [m]	Y[m]	Z[m]	Clock corr. [m]
12	23557228.789	14115557.51	9512669.01	20713559.79	-190652.118
13	24109913.370	2786931.08	12673788.78	23274029.06	185378.351
14	27706964.477	-17297742.17	2613743.46	20008566.43	-40.674
20	23674335.814	17772982.94	-12749483.23	14936050.42	1857.709
24	27348050.743	11264602.24	23578213.06	5296555.95	-9719.603
25	27021641.651	-3284739.66	-22519326.10	13778493.57	23302.540

SV	Elevation Angle	A Priori Weight
12	60.805	0.701101
13	41.576	0.405151
14	3.709	0.003849
20	48.377	0.514099
24	7.722	0.01661
25	10.034	0.027928

Wstępne oszacowanie:

$$x = \begin{bmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \\ \tilde{Z} \\ d\tilde{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3326445,7401\text{m} \\ -177062,6092\text{m} \\ 5421002,7619\text{m} \\ -0,007643680\text{s} \end{bmatrix}$$

Pomiar sytuacyjno-wysokościowy:

$$A = \begin{bmatrix} -0,511937 & -0,459772 & -0,725623 & -299792458 \\ 0,024519 & -0,584029 & -0,811362 & -299792458 \\ 0,811484 & -0,109808 & -0,573965 & -299792458 \\ -0,675556 & 0,587917 & -0,444947 & -299792458 \\ -0,316933 & -0,948435 & 0,004969 & -299792458 \\ 0,267082 & 0,902593 & -0,33760 & -299792458 \end{bmatrix}$$

$$b_i = P_i + c \cdot \Delta T_i - \sqrt{(\tilde{X} - X_i)^2 + (\tilde{Y} - Y_i)^2 + (\tilde{Z} - Z_i)^2} + c \cdot d \tilde{T}$$

$$b = \begin{bmatrix} -0,424547451 \\ 1,57689721 \\ 2,605596567 \\ 0,804413421 \\ -1,397538325 \\ -0,720283596 \end{bmatrix} \quad W = \begin{bmatrix} 0,7011 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4052 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0038 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5141 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0166 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0279 \end{bmatrix}$$

Pomiar sytuacyjno-wysokościowy:

$$\Delta x = (A^T \cdot W \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot W \cdot b = \begin{bmatrix} 2,149767369 \\ 1,548361068 \\ -2,523584552 \\ -2,58417E-10 \end{bmatrix}$$

Współrzędne odbiornika i wyrównanie zegara są obliczane w wyniku dodania wektora poprawek Δx do wstępnych oszacowań x :

$$\begin{bmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \\ \tilde{Z} \\ \tilde{dT} \end{bmatrix} = x + \Delta x = \begin{bmatrix} 3326445,7401 \\ -177062,6092 \\ 5421002,7619 \\ -0,007643680 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2,149767369 \\ 1,548361068 \\ -2,523584552 \\ -2,58417E-10 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 3326447,8899 \\ -177061,0608 \\ 5421000,2383 \\ -0,007643680 \end{bmatrix}$$

Następnie obliczenia są powtarzane dla uaktualnionych wartości parametrów pozycji do momentu osiągnięcia:

$$\Delta x \cong 0$$

Pomiar sytuacyjno-wysokościowy:

Kolejne szacowania x :

1:

$$\begin{bmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \\ \tilde{Z} \\ {}_d\tilde{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3326445,7401 \\ -177062,6092 \\ 5421002,7619 \\ -0,007643680 \end{bmatrix}$$

2:

$$\begin{bmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \\ \tilde{Z} \\ {}_d\tilde{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3326447,8899 \\ -177061,0608 \\ 5421000,2383 \\ -0,007643680 \end{bmatrix}$$

3: ...

Współrzędne geodezyjne:

Współrzędne geocentryczne X, Y, Z punktów GPS są przeliczane na współrzędne geodezyjne B, L, h według zależności [Osada 2001, Clynch 2006]:

$$L(X, Y, Z) = \arctan\left(\frac{Y}{X}\right)$$

$$B(X, Y, Z) = \left| \begin{array}{l} B_1 \leftarrow 0 \\ R_1 \leftarrow 0 \\ \text{for } i = 1..5 \\ \quad \left| \begin{array}{l} B_{i+1} \leftarrow \arctan\left(\frac{Z + R_i \cdot e^2 \cdot \sin(B_i)}{X \cdot \cos(L) + Y \cdot \sin(L)}\right) \\ R_{i+1} \leftarrow \frac{a}{\sqrt{1 - (e \cdot \sin(B_{i+1}))^2}} \end{array} \right. \\ B \leftarrow B_6 \end{array} \right.$$

$$h(X, Y, Z) = \frac{Z}{\sin(B(X, Y, Z))} - \frac{a \cdot (1 - e^2)}{\sqrt{1 - (e \cdot \sin(B(X, Y, Z)))^2}}$$

Pomiar kinematyczny:

Dokładne położenie mierzonych lub tyczonych punktów względem wybranego punktu osnowy geodezyjnej, rzędu milimetrów, otrzymuje się w wyniku **jednoczesnej rejestracji sygnałów z dostępnych satelitów przez odbiornik ruchomy (ang. *rover*) ustawiany na wyznaczanych punktach B i odbiornik stały (ang. *fixed, reference*) ustawiony na punkcie odniesienia A .**

Pomiar kinematyczny:

Odbiornik stały przekazuje dane przez modem radiowy (VHF, GSM) do odbiornika ruchomego, który przeprowadza obliczenie współrzędnych X_B , Y_B , Z_B :

- W pierwszym przybliżeniu na podstawie jednoczesnych obserwacji pseudoodległości w stacji referencyjnej A i ruchomej B :

$$P_{Ai} = c(t_A - t_i), P_{Bi} = c(t_B - t_i)$$

i wyznaczeniu poprawek do zmierzonych pseudoodległości w stacji referencyjnej na podstawie porównania obserwacji kodowych z teoretycznymi odległościami pomiędzy satelitami a punktem odniesienia A .

Pomiar kinematyczny:

Jest to technika tzw. kodowego DGPS (różnicowego GPS), w której poprawki z odbiornika *A* mogą być zastosowane w odbiorniku *B*, gdy:

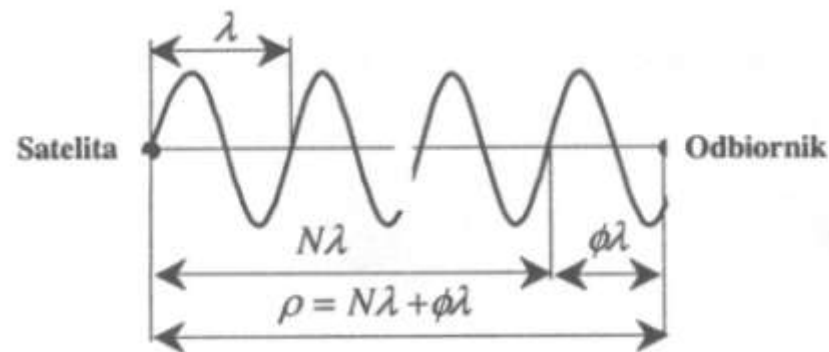
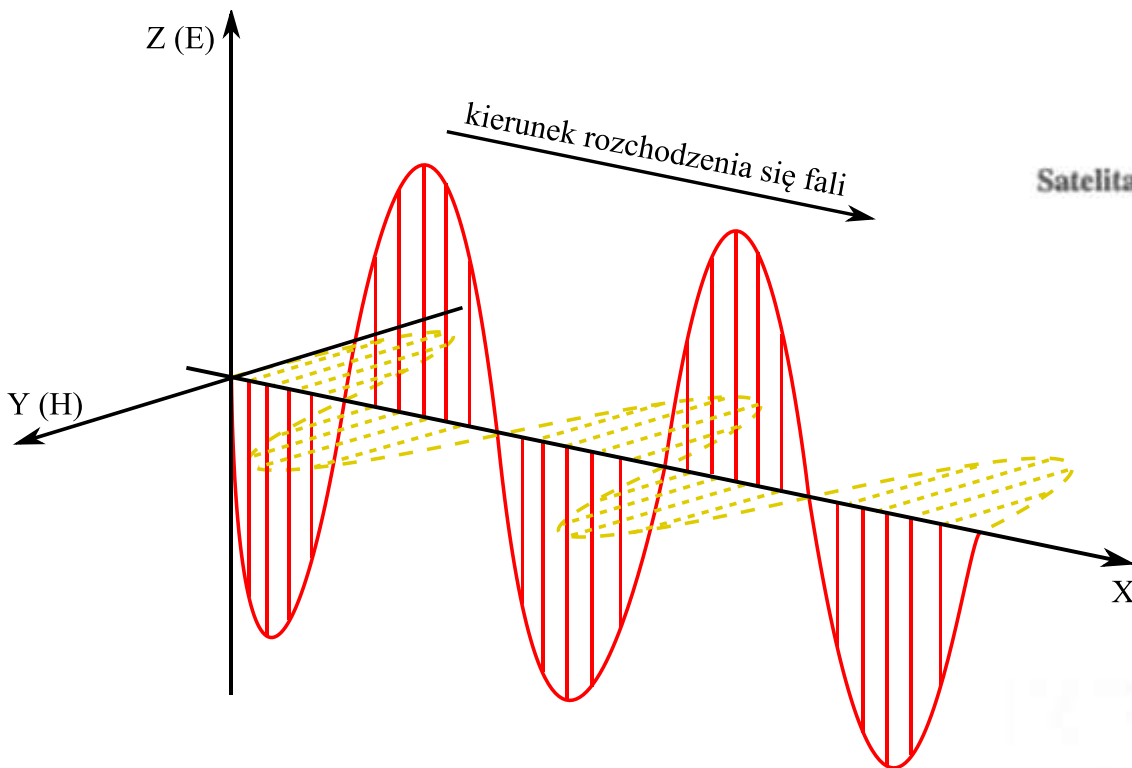
- błąd zegara mierzonego satelity jest taki sam dla synchronicznych obserwacji wykonywanych przez *A* i *B*,
- błąd zegara odbiornika jest taki sam dla jednoczesnych obserwacji wszystkich satelitów,
- poprawki jonosferyczne i troposferyczne dla każdej z obserwacji synchronicznych mogą mieć zbliżone wartości, jeżeli odbiorniki *A* i *B* nie są zbyt odległe (do ok. 30 km).

Błędy średnie uzyskanych współrzędnych $< 3\text{m}$.

Pomiar kinematyczny – model fazowy:

- W drugim przybliżeniu poprawki dX , dY , dZ do współrzędnych przybliżonych odbiornika ruchomego X_B , Y_B , Z_B są wyznaczane na podstawie obserwacji fazowych – droga ρ sygnału między satelitą i odbiornikiem z pominięciem błędów jest wyrażana w postaci:

$$\rho = N\lambda + \phi\lambda$$



f – częstotliwość fali nośnej sygnału

$\lambda = c/f$ – długość fali:

Fala	f	λ
L1	1575.42 MHz	0.19 m
L2	1227.60 MHz	0.24 m

ϕ – faza fali

N – liczba cykli na drodze sygnału ρ

Pomiar kinematyczny – model fazowy:

Odbiornik wykonuje pomiar przesunięcia fazowego ϕ_i fal: przychodzącej wyemitowanej przez zegar satelity w momencie t_i i generowanej przez zegar odbiornika w momencie odbioru t .

Pełne równanie obserwacyjne pomiaru fazowego:

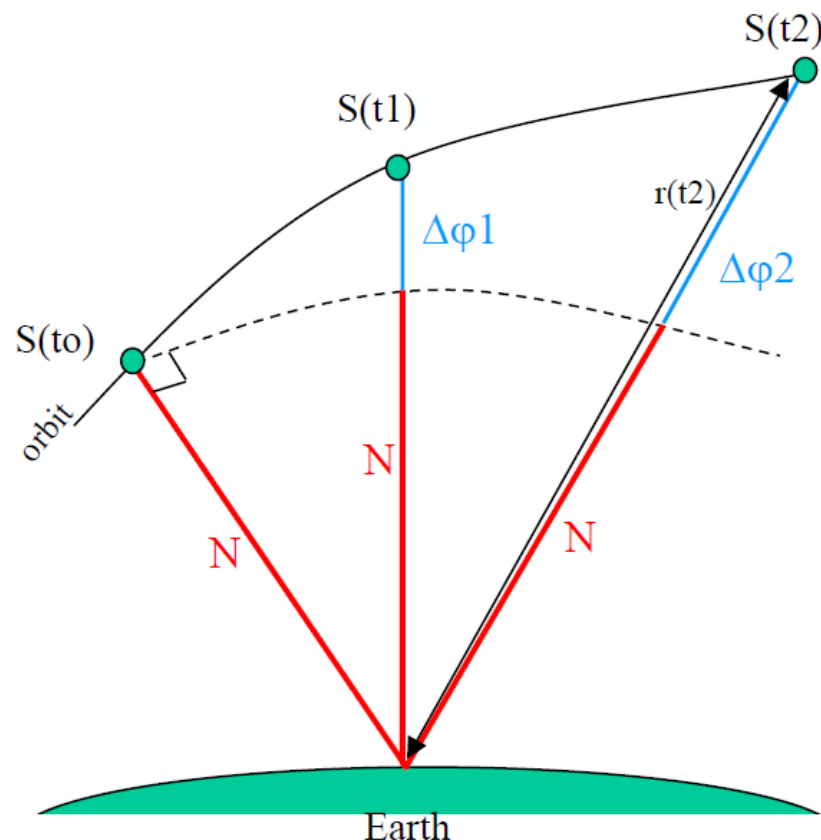
$$\phi_i = \frac{1}{\lambda} \rho_i - N_i + f(\delta_i) - f(\delta) + f(\delta_{jonQ_i}) + f(\delta_{tropQ_i}) + f(\varepsilon_i)$$

przy czym, poza warunkami analogicznymi jak w pomiarach DGPS, liczba cykli N_i dla danej pary satelita i – odbiornik musi być niezmienna przez wszystkie momenty obserwacyjne, jeżeli nie nastąpiła utrata cykli fazowych z powodu przerw w odbiorze (przesłonięć) lub osłabień sygnału.

Pomiar kinematyczny – model fazowy:

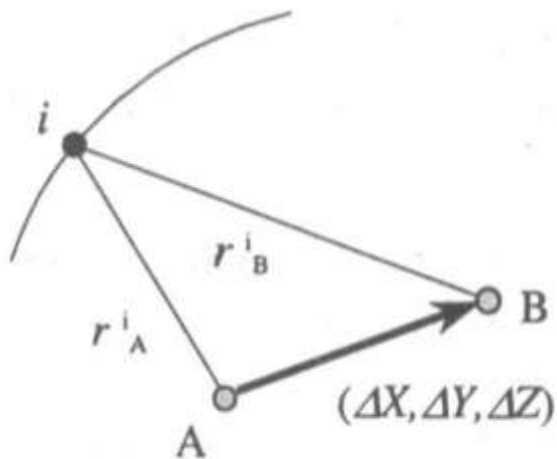
Wyznaczenie N :

- gdy nastąpiła synchronizacja sygnału satelitarne (w t_0) odbiornik rozpoczyna śledzenie fazy,
- wyznacza liczbę okresów fali N w funkcji czasu $\Delta\phi(t)$,
- ale początkowa liczba okresów N w t_0 jest nieznana...
- jednakże przy ciągłej synchronizacji sygnału N jest przez kilka - kilkadziesiąt pomiarów stała dla obserwowanego łuku orbity.



Pomiar statyczny:

Pomiar statyczny - równania różnic obserwacji fazowych:



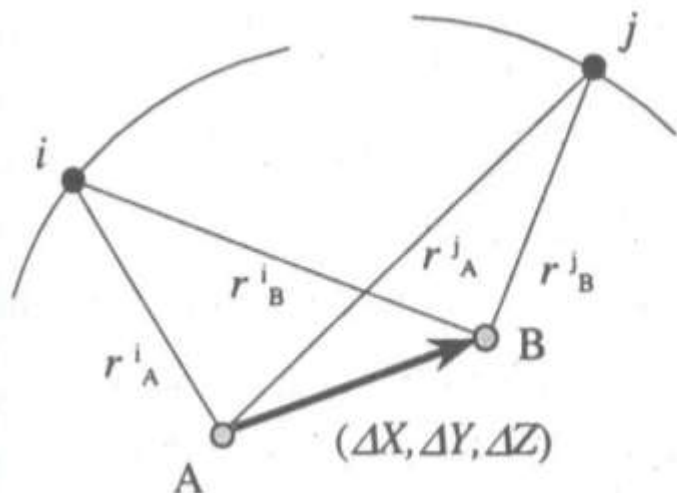
Pojedyncza różnica – z obserwacji fazowych sygnału satelity i przez odbiorniki A i B:

$$\begin{aligned}\Delta\phi_{AB}^i &= \phi_B^i - \phi_A^i \\ &= \frac{r_A^i - r_B^i}{\lambda} + f(\delta_A - \delta_B) + \Delta N_{AB}^i\end{aligned}$$

gdzie $\Delta N_{AB}^i = N_B^i - N_A^i$

Pomiar statyczny:

Równania różnic obserwacji fazowych:



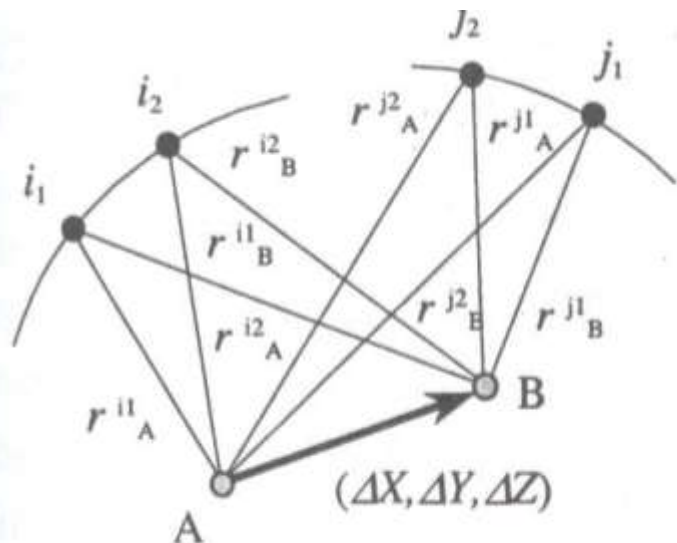
Podwójna różnica – z obserwacji fazowych sygnałów satelitów i, j przez odbiorniki A i B:

$$\begin{aligned}\nabla\Delta\phi_{AB}^{ij} &= \Delta\phi_{AB}^i - \Delta\phi_{AB}^j \\ &= \frac{r_A^j - r_B^j - r_A^i + r_B^i}{\lambda} + \nabla\Delta N_{AB}^{ij}\end{aligned}$$

gdzie $\nabla\Delta N_{AB}^{ij} = N_B^j - N_A^j - N_B^i + N_A^i$

Pomiar statyczny:

Równania różnic obserwacji fazowych:



Potrójna różnica – z obserwacji fazowych sygnałów satelitów i, j przez odbiorniki A i B: w dwóch momentach czasowych t_1 i t_2 :

$$\begin{aligned} \delta \nabla \Delta \phi_{AB}^{ij} &= \nabla \Delta \phi_{AB_2}^{ij} - \nabla \Delta \phi_{AB_1}^{ij} \\ &= \frac{r_A^{j2} - r_B^{j2} - r_A^{i2} + r_B^{i2} - r_A^{j1} + r_B^{j1} + r_A^{i1} - r_B^{i1}}{\lambda} \end{aligned}$$

Pomiar statyczny:

Równania obserwacyjne potrójnych różnic faz formułowane są przy założeniu jednego z satelitów jako bazowego. Na przykład dla sześciu dostępnych satelitów formułowanych jest 5 równań (kombinacje 1-2, 1-3, 1-4, 1-5, 1-6) zawierających trzy niewiadome poprawki dX , dY , dZ do przybliżonych współrzędnych odbiornika ruchomego X_B , Y_B , Z_B .

Pełny układ obserwacyjny zawiera wielokrotność tych równań, dla każdej pary momentów pomiarowych t_1 , t_2 . W wyniku jego rozwiązania metodą najmniejszych kwadratów otrzymuje się poprawki dX , dY , dZ oraz współrzędne odbiornika ruchomego $X_B + dX$, $Y_B + dY$, $Z_B + dZ$ z błędem średnim rzędu 0,5m.

Pomiar statyczny:

Równania obserwacyjne podwójnych różnic faz formułowane są analogicznie jak potrójnych różnic faz przy założeniu jednego z satelitów, jako bazowego.

Błędy średnie poprawionych współrzędnych są rzędu 0,05m.

Poprawki dX , dY , dZ do współrzędnych przybliżonych odbiornika ruchomego X_B , Y_B , Z_B , po założeniu znanych, stałych wartości liczby cykli wyznaczonych w pierwszym wyrównaniu podwójnych różnic faz, są wyznaczane poprzez **powtórne rozwiązanie równań podwójnych różnic faz**. Błędy średnie rzędu 0,005m. Otrzymujemy **macierz błędu poprawek**:

$$C = \begin{bmatrix} m_{dX}^2 & m_{dXdY} & m_{dXdZ} \\ m_{dXdY} & m_{dY}^2 & m_{dYdZ} \\ m_{dXdZ} & m_{dYdZ} & m_{dZ}^2 \end{bmatrix}$$

Macierz ta jest jednocześnie macierzą błędów przyrostów współrzędnych:

$$\Delta X = X_B - X_A, \Delta Y = Y_B - Y_A, \Delta Z = Z_B - Z_A$$

Na jej podstawie błąd wyznaczonego punktu B względem punktu odniesienia A :

$$m_B = \sqrt{m_{\Delta X}^2 + m_{\Delta Y}^2 + m_{\Delta Z}^2} = \sqrt{m_{dX}^2 + m_{dY}^2 + m_{dZ}^2}$$

Wyrównanie pomiarów:

W wyniku pomiarów dowiązanych do punktu osnowy geodezyjnej 1 o znanych współrzędnych otrzymuje się przyrosty współrzędnych [m] między tym punktem a dwoma nowymi punktami 2 i 3 oraz macierze błędów przyrostów [mm²].



$$\Delta X_2 = 183,532$$

$$\Delta Y_2 = -330,791$$

$$\Delta Z_2 = -61,566$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 18 & 3 & -14 \\ 3 & 22 & -4 \\ -14 & -4 & 57 \end{bmatrix}$$

$$\Delta X_3 = -27,915$$

$$\Delta Y_3 = -447,725$$

$$\Delta Z_3 = 123,135$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} 11 & -1 & -2 \\ -1 & 10 & 3 \\ -2 & 3 & 44 \end{bmatrix}$$



$$X_1 = 3762673,68$$

$$Y_1 = 1150783,065$$

$$Z_1 = 5003144,171$$

$$\Delta X_1 = 211,457$$

$$\Delta Y_1 = 116,932$$

$$\Delta Z_1 = -184,696$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 15 & -7 & 12 \\ -7 & 16 & 9 \\ 12 & 9 & 49 \end{bmatrix}$$



Wyrównanie pomiarów:

Układ równań poprawek wiążący wyznaczone punkty z punktem dowiązania:

$$v_{\Delta X_1} = X_2 - X_1 - \Delta X_1 \quad v_{\Delta Y_1} = Y_2 - Y_1 - \Delta Y_1 \quad v_{\Delta Z_1} = Z_2 - Z_1 - \Delta Z_1$$

$$v_{\Delta X_2} = X_3 - X_1 - \Delta X_2 \quad v_{\Delta Y_2} = Y_3 - Y_1 - \Delta Y_2 \quad v_{\Delta Z_2} = Z_3 - Z_1 - \Delta Z_2$$

$$v_{\Delta X_3} = X_3 - X_2 - \Delta X_3 \quad v_{\Delta Y_3} = Y_3 - Y_2 - \Delta Y_3 \quad v_{\Delta Z_3} = Z_3 - Z_2 - \Delta Z_3$$

w zapisie macierzowym (9 obserwacji i 6 niewiadomych):

$$\begin{bmatrix} v_{\Delta X_1} \\ v_{\Delta Y_1} \\ v_{\Delta Z_1} \\ v_{\Delta X_2} \\ v_{\Delta Y_2} \\ v_{\Delta Z_2} \\ v_{\Delta X_3} \\ v_{\Delta Y_3} \\ v_{\Delta Z_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \\ X_3 \\ Y_3 \\ Z_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_1 + \Delta X_1 \\ Y_1 + \Delta Y_1 \\ Z_1 + \Delta Z_1 \\ X_1 + \Delta X_2 \\ Y_1 + \Delta Y_2 \\ Z_1 + \Delta Z_2 \\ \Delta X_3 \\ \Delta Y_3 \\ \Delta Z_3 \end{bmatrix}$$

Wyrównanie pomiarów:

Układ równań poprawek wiążący wyznaczone punkty z punktem dowiązania:

$$v = A \cdot x - l$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad l = \begin{bmatrix} X_1 + \Delta X_1 \\ Y_1 + \Delta Y_1 \\ Z_1 + \Delta Z_1 \\ X_1 + \Delta X_2 \\ Y_1 + \Delta Y_2 \\ Z_1 + \Delta Z_2 \\ \Delta X_3 \\ \Delta Y_3 \\ \Delta Z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3762885,137 \\ 1150899,997 \\ 5002959,475 \\ 3762857,212 \\ 1150452,274 \\ 5003082,605 \\ -27,915 \\ -447,725 \\ 123,135 \end{bmatrix}$$

Wyrównanie pomiarów:

Macierz błędów przyrostów C , przyjmując:

$$i=1\dots 3, \quad j=1\dots 3, \quad C_{i,j}=C_{1_{i,j}}, \quad C_{3+i,3+j}=C_{2_{i,j}}, \quad C_{6+i,6+j}=C_{3_{i,j}}$$

$$C = \begin{bmatrix} 15 & -7 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 16 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 9 & 49 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & 3 & -14 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 22 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -14 & -4 & 57 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & 44 \end{bmatrix}$$

Wyrównanie pomiarów:

Macierz wag obserwacji P równa odwrotności macierzy błędów przyrostów:

$$P = C^{-1}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0,1624 & 0,1042 & -0,0589 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,1042 & 0,1366 & -0,0506 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0589 & -0,0506 & 0,0441 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0696 & -0,0065 & 0,0166 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0065 & 0,0466 & 0,0017 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0166 & 0,0017 & 0,0217 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0923 & 0,0081 & 0,0036 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0081 & 0,1028 & -0,0066 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0036 & -0,0066 & 0,0233 & 0 \end{bmatrix}$$

Wyrównanie pomiarów:

Rozwiązaniem układu obserwacyjnego:

$$v = A \cdot x - l$$

$$P$$

metodą ważonych najmniejszych kwadratów:

$$v^T \cdot P \cdot v = \min$$

są:

1) współrzędne punktów wyznaczanych:

$$x = \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \\ X_3 \\ Y_3 \\ Z_3 \end{bmatrix} = (A^T \cdot P \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot P \cdot l$$

Wyrównanie pomiarów:

2) macierz błędów współrzędnych:

$$C_x = (A^T \cdot P \cdot A)^{-1}$$

3) błędy średnie współrzędnych:

$$m_{X_2} = \sqrt{C_{x_{1,1}}}$$

$$m_{Y_2} = \sqrt{C_{x_{2,2}}}$$

$$m_{Z_2} = \sqrt{C_{x_{3,3}}}$$

$$m_{X_3} = \sqrt{C_{x_{4,4}}}$$

$$m_{Y_3} = \sqrt{C_{x_{5,5}}}$$

$$m_{Z_3} = \sqrt{C_{x_{6,6}}}$$

$$m_{XY_2} = C_{x_{1,2}}$$

$$m_{XZ_2} = C_{x_{1,3}}$$

$$m_{YZ_2} = C_{x_{2,3}}$$

$$m_{XY_3} = C_{x_{4,5}}$$

$$m_{XZ_3} = C_{x_{4,6}}$$

$$m_{YZ_3} = C_{x_{5,6}}$$

Wyrównanie pomiarów:

4) poprawki przyrostów współrzędnych:

$$v = A \cdot x - l$$

$$\begin{bmatrix} v_{\Delta X_1} \\ v_{\Delta Y_1} \\ v_{\Delta Z_1} \\ v_{\Delta X_2} \\ v_{\Delta Y_2} \\ v_{\Delta Z_2} \\ v_{\Delta X_3} \\ v_{\Delta Y_3} \\ v_{\Delta Z_3} \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \\ X_3 \\ Y_3 \\ Z_3 \end{bmatrix} - l$$

Wyrównanie pomiarów:

- 5) błędy średnie przyrostów współrzędnych i ich poprawek (w notacji MATLAB):

$i = 1..size(A,1) \Rightarrow i = 1..9, \quad a_i = A(i,:) - \text{wiersz macierzy } A$

- błędy przyrostów przed wyrównaniem:

$$m_{\Delta X_i} = \sqrt{C_{i,i}}$$

- błędy przyrostów po wyrównaniu:

$$m_{\Delta Y_i} = \sqrt{|a_i \cdot C_x \cdot a_i^T|}$$

- błędy średnie poprawek:

$$m_v = \sqrt{m_{\Delta X}^2 - m_{\Delta Y}^2}$$

Wyrównanie pomiarów:

6) test zgodności obserwacji:

- odchylenie standardowe poprawek obserwacji:

$$m_o = \sqrt{\frac{v^T \cdot P \cdot v}{n - k}}$$

gdzie (w notacji MATLAB):

$n = \text{size}(A,1)$, $n = 9$ - liczba obserwacji,

$k = \text{size}(A,2)$, $k = 6$ - liczba wyznaczanych niewiadomych,

- weryfikacja błędów średnich poprawek:

$$|v| \leq r \cdot m_v$$

gdzie zwykle: $r = 2$